SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1993-94

Fausto Ferrari

STATI FONDAMENTALI PER OPERATORI HESSIANI

24 marzo 1994

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. In questa nota esporrò alcuni risultati che ho ottenuto recentemente sull'esistenza di stati fondamentali per la seguente equazione:

$$(G) : S_k(\nabla^2 u(x)) + (-1)^{k-1} g(||\nabla u(x)||^2) f(u(x)) = 0, \;\; x \in \mathbf{R}^n,$$

dove k è un numero intero tale che $1 \leq k \leq n$. Uno stato fondamentale per (G) è una funzione di classe C^2 su tutto $\mathbf{R}^n$, non-negativa, infinitesima all'infinito, soluzione classica non-banale dell'equazione (G).

Abstract. In this note I shall esplain some results I recently achieved about the existence of ground states for the following equation:

$$(G) : S_k(\nabla^2 u(x)) + (-1)^{k-1} g(||\nabla u(x)||^2) f(u(x)) = 0, \;\; x \in \mathbf{R}^n,$$

where k is an integer such that $1 \leq k \leq n$. A ground state for (G) is a function of class C^2 defined on all of $\mathbf{R}^n$, vanishing at infinity which is a classical non-negative, non-trivial solution of the equation (G).

1 Introduzione

Notazioni principali e alcune proprietà di S_k

Con i simboli ∇u, $\nabla^2 u$ e $S_k(\nabla^2 u)$ indicherò nell'ordine: il gradiente, la matrice Hessiana e il k-esimo operatore Hessiano di u. Il k-esimo operatore Hessiano della funzione u è per definizione la k-esima funzione simmetrica elementare degli autovalori della matrice Hessiana di u. Per chiarirne il significato ricordiamo che il polinomio caratteristico p_B di una matrice $B \in M^{n \times n}$ soddisfa la seguente uguaglianza, vedi [7]:

$$(-1)^n p_B(x) = x^n - S_1(B)x^{n-1} + ... + (-1)^n S_n(B),$$

dove $S_i(B)$, con $i = 1, ..., n$, rappresenta la funzione simmetrica elementare di ordine i degli autovalori della matrice B, ovvero i coefficienti del polinomio dell'equazione secolare

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Quindi:

$$S_1(\nabla^2 u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = Tr\nabla^2 u = \Delta u,$$

$$S_2(\nabla^2 u) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j,$$

$$\vdots$$

$$S_2(\nabla^2 u) = \prod_{i=1}^{n} = \det(\nabla^2 u).$$

In modo più esplicito $S_k(\nabla^2 u)$ è la somma di tutti i minori principali di ordine k della matrice Hessiana, cioè la somma dei determinanti di tutte le sottomatrici di ordine k simmetriche rispetto alla diagonale principale, vedi [7].

Per esempio se $n = 3$:

$$\nabla^2 u = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \end{bmatrix};$$

quindi:

$$\text{per } k = 1, \ S_1(\nabla^2 u) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u;$$

$$\text{per } k=2,\ S_2(\nabla^2 u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2}\right)^2;$$

$$\text{per } k=3,\ S_3(\nabla^2 u) = \det \nabla^2 u.$$

Da questa osservazione è semplice dedurre che $S_k(\nabla^2 u)$ è omogenea di ordine k, cioè:

$$S_k(t\nabla^2 u) = t^k S_k(\nabla^2 u), \ \forall t > 0.$$

Pertanto grazie all'identità di Eulero si ha:

$$S_k(\nabla^2 u) = \frac{1}{k}\sum_{i,j} \frac{\partial S_k(\nabla^2 u)}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Osserviamo che $S_k(\nabla^2 u)$ si può anche scrivere come:

$$S_k(\nabla^2 u) = \frac{1}{k}\sum_{i,j} T_{k-1}(\nabla^2 u)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

dove, per $0 \le r \le n-1$, $T_r(\nabla^2 u)$ è la r-esima trasformazione di Newton definita nel modo seguente:

$$(-1)^r T_r(\nabla^2 u) = (\nabla^2 u)^r - S_1(\nabla^2 u)(\nabla^2 u)^{r-1} + \cdots + (-1)^r S_r(\nabla^2 u) I.$$

Si riconosce facilmente che, vedi [8]:

$$T_r(\nabla^2 u)_{ij} = \frac{1}{r!}\delta^{j_1,\ldots,j_r,j}_{i_1,\ldots,i_r,i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_r} \partial x_{j_r}},$$

dove $\delta^{j_1,\ldots,j_r,j}_{i_1,\ldots,i_r,i}$ indica la delta di Kronecker generalizzata:

$$\delta^{j_1,\ldots,j_r,j}_{i_1,\ldots,i_r,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1,\ldots,i_r,i \text{ sono distinti e } \begin{pmatrix} j_1,\ldots,j_r \\ i_1,\ldots,i_r \end{pmatrix} \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } i_1,\ldots,i_r,i \text{ sono distinti e } \begin{pmatrix} j_1,\ldots,j_r \\ i_1,\ldots,i_r \end{pmatrix} \text{ è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

L'origine del problema

Le curvature principali di una superficie di $\mathbf{R}^{n+1}$ nel punto $x_0 \equiv (\tilde{x_0}, \hat{x_0})$, con $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ e $\hat{x} \in \mathbf{R}$, sono gli autovalori della matrice Hessiana di una funzione f il cui

grafico, almeno localmente, rappresenta la superficie in un intorno di x_0 quando, con una opportuna scelta del sistema di riferimento, x_0 coincide con l'origine e $\nabla f(0) = 0$, vedi [6]. Quindi, in generale, data una superficie che sia il grafico di una funzione u rispetto ad un sistema di riferimento definitivamente fissato, gli autovalori della matrice Hessiana non coincidono con le curvature principali. Infatti le curvature principali sono gli autovalori di una matrice più complessa di quella Hessiana, ottenuta a partire dalla seconda forma fondamentale della superficie. Pertanto lo studio delle funzioni simmetriche elementari degli autovalori della matrice Hessiana di una funzione u costituisce un primo approccio allo studio delle possibili curvature della superficie rappresentata dal grafico di u.
Per esempio se $n = 2$ e $u(x, y) = z$ è di classe C^2, allora le curvature principali del grafico di u sono gli autovalori della seguente matrice L(u):

$$L(u) = \frac{\nabla^2 u}{(1 + ||\nabla u||^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 & -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} & 1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, quando $||\nabla u|| \to 0$, la matrice $L(u)$ può essere approssimata dalla matrice Hessiana $\nabla^2 u$ e in tal caso $S_k(\nabla^2 u)$ approssima $S_k(L(u))$, cioè la k-esima funzione simmetrica elementare delle curvature principali della superficie data dal grafico di u.
D'altra parte se $k = n$, allora, vedi [6] :

$$S_n(L(u)) \equiv K(u) = \frac{S_n(\nabla^2 u)}{(1 + ||\nabla u||^2)^{(n+2)/2}},$$

dove $K(u)$ è la curvatura di Gauss. Pertanto, anche per $k \leq n$, al posto dell'equazione:

$$S_k(L(u)) + (-1)^{k-1} f(u) = 0,$$

è naturale studiare la seguente analoga a (G):

$$S_k(\nabla^2 u) + (-1)^{k-1}(1 + ||\nabla u||^2)^{s/2} f(u) = 0,$$

dove s è un numero reale non negativo.
Motivazione della presenza del coefficiente $(-1)^{k-1}$
Se in analogia con il classico problema di Dirichelet su un aperto limitato Ω di $\mathbf{R}^n$, consideriamo il problema al contorno:

$$(A) : \begin{cases} S_k(\nabla^2 w) + h(w) = 0 \\ w|_\Omega = 0, \end{cases}$$

allora le soluzioni ammissibili per (A) sono negative se $h(w) < 0$. Secondo la definizione di Caffarelli, Nirenberg e Spruck, una funzione è ammissibile per S_k, $k \geq 2$,

vedi [9], se gli autovalori della matrice Hessiana appartengono alla componente connessa Γ_k dell'insieme

$$\{\lambda \equiv (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)/\text{la k-esima funzione simmetrica elementare di } \lambda \text{ è } > 0\},$$

che contiene il cono $\{\lambda/\lambda_i > 0 \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$ per ogni $x \in \Omega$. Inoltre se w è ammissibile per S_k, allora $S_k(\nabla^2 w)$ è ellittico, vedi [9], cioè $\forall \xi, ||\xi|| > 0, \forall x \in \Omega$ si ha:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial S_k(\nabla^2 w)}{\partial r_{i,j}} \xi_i \xi_j > 0.$$

Per l'identità di Eulero vale:

$$S_k(\nabla^2 w) = \frac{1}{k} \sum_{i,j} \frac{\partial S_k(\nabla^2 w)}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Quindi se w è ammissibile per S_k, l'operatore:

$$L = \frac{1}{k} \sum_{i,j} \frac{\partial S_k(\nabla^2 w)}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

è lineare ed ellittico per ogni $x \in \Omega$. Pertanto da (A), con w ammissibile, segue per il principio del massimo che:

$$\sup_{\Omega} w = \sup_{\partial\Omega} w = 0,$$

cioè u è negativa, vedi [6]. Per esempio nel caso dell'operatore di Monge-Ampére, se $n = 2$ il linearizzato di, vedi [6]:

$$S_2(\nabla^2 w) \equiv \det \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2$$

è il seguente:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_2}{\partial r_{11}} & \frac{\partial S_2}{\partial r_{12}} \\ \\ \frac{\partial S_2}{\partial r_{21}} & \frac{\partial S_2}{\partial r_{22}} \end{bmatrix}.$$

Quindi $F = \det \nabla^2 w (\nabla^2 w)^{-1}$, cioè $\nabla^2 w$ è definita positiva se e solo se (F) è ellittico. Pertanto w sarà convessa, ma poichè $u_{|\partial\Omega} = 0$, w sarà negativa. In realtà dunque, siamo interessati a stati fondamentali negativi; d'altra parte per

i risultati di Gidas,Ni e Nirenberg e Franchi-Lanconelli, vedi [4], è ragionevole cercare soluzioni a simmetria radiale. Pertanto, posto $u = -w > 0$, da:

$$\begin{cases} S_k(\nabla^2(-u)) + g(||\nabla(-u)||^2)\tilde{f}(-u) = 0, \text{ in } \mathbf{R}^n \\ u \geq 0 \\ u(x) \to 0, \ ||x|| \to \infty, \end{cases}$$

segue:

$$\begin{cases} S_k(\nabla^2(u)) + (-1)^{k-1}g(||\nabla(u)||^2)f(u) = 0, \text{ in } \mathbf{R}^n \\ u \geq 0 \\ u(x) \to 0, \ ||x|| \to \infty, \end{cases}$$

dove $f(s) = -\tilde{f}(-s)$.

La letteratura esistente

La struttura degli stati fondamentali è stata inizialmente studiata per equazioni del tipo:

$$\Delta u + f(u) = 0, \text{ in } \mathbf{R}^n$$

da Gidas, Ni e Nirenberg i quali provarono che per f di classe $C^{1+\epsilon}$ in un intorno di 0, con $f(0)$ e $f'(0) < 0$, gli stati fondamentali sono necessariamente a simmetria radiale. Sotto ulteriori condizioni poste su f l'esistenza di stati fondamentali a simmetria radiale, è stata oggetto di studio da parte di numerosi autori fra i quali: Beresticki-P.L.Lions-Peletier, Atkinson-Peletier, Franchi-Lanconelli e Franchi. Mentre l'unicità è stata studiata fra gli altri da: Peletier-Serrin, Kwong e Franchi-Lanconelli-Serrin. In Particolare per il problema che ho esaminato, almeno nei punti essenziali, ho utilizzato la tecnica dei lavori di Franchi-Lanconelli-Serrin, per il caso quasilineare, vedi [3], e di Franchi per l'equazione di Monge-Ampère, vedi [5]. In entrambi i casi per dimostrare l'esistenza di uno stato fondamentale si fa uso di una tecnica precedentemente impiegata da Beresticki-P.L.Lions-Peletier, vedi [1], e da Peletier-Serrin, basata sul metodo cosiddetto dello "shooting" relativamente alle equazioni di Poisson semilineari.

2 Esistenza

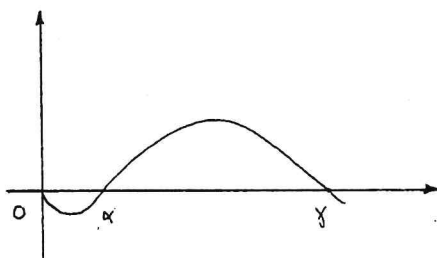
Ipotesi fondamentali

Le condizioni sotto le quali opero sono essenzialmente le stesse assunte da Franchi per studiare un problema analogo per una classe di equazioni di tipo Monge-Ampère, vedi [5]:

$$S_n(\nabla^2 u(x)) \equiv \det(\nabla^2 u(x)) = (-1)^{k-1}g(||\nabla u(x)||^2)f(u(x)), \text{ in } \mathbf{R}^n,$$

che si ottiene dalla (G) per k=n.

(I_1) : $f : [0,\infty[\to R$ è continua e localmente Lipschitz continua su$]0,\infty[$;

(I_2) : esistono $\alpha > 0$ e γ in $]\alpha,\infty[$ tali che $f(u) < 0$ per $u \in]0,\alpha[$, $f(0) = f(\alpha) = f(\gamma) = 0$ e $f(u) > 0$ per $u \in]\alpha,\gamma[$.

Nel caso "modello"in cui $g(p) = (1+p)^{s/2}$, se $s \geq 0$, si ha il seguente:

Teorema 2.1 *Nelle ipotesi* (I_1) *e* (I_2) *se* $0 \leq s \leq k+1 \leq n+1$, *allora esiste uno stato fondamentale per l'equazione* (G).

Schema della dimostrazione
Poichè cerco soluzioni a simmetria radiale, studio il problema relativo alla seguente equazione differenziale ordinaria

$$(\frac{y'}{r})^{k-1}y'' + \frac{n-k}{k}(\frac{y'}{r})^k + (-1)^{k-1}g(y'^2)g(y) = 0, \ r > 0,$$

con

$$y(0) \geq 0, \ y'(0) = 0$$

e

$$\lim_{r\to\infty} y(r) = 0,$$

dove $f(s) \equiv \frac{k}{C_{k-1}^{n-1}} f(s)$.
Con un opportuno cambiamento di variabili il problema può essere riscritto nella seguente forma:

$$(P_1): \begin{cases} (v'^k)' + \frac{a_{nk}v'^k}{2t} + (-1)^{k-1}g(v'^2t^{(k-1)/k})f(v) = 0 \\ v'(0) = 0 \\ v \geq 0 \\ v(t) \to 0, \ t \to \infty. \end{cases}$$

Come nel lavoro di Franchi è naturale considerare il seguente problema ellittico

$$(P_2): \begin{cases} \dfrac{(|v'|^{k-1}v')'}{g(t^{(k-1)/k}|v'|^2)} + \dfrac{a_{nk}}{2t}\dfrac{|v'|^{k-1}v'}{g(t^{(k-1)/k}|v'|^2)} + f(v) = 0, \text{ in } \mathbf{R}^+ \\ v'(0) = 0, \; v \geq 0 \\ v(t) \to 0, \; t \to \infty. \end{cases}$$

Una soluzione v di (P_2) è detta regolare se $v \in C^1$ e $|v'|^{k-1}v' \in C^1$. Se provo l'esistenza di una soluzione regolare, non banale, decrescente, del problema (P_2), allora v è soluzione di (P_1) e quindi di (P). Per ottenere questo risultato, studio il seguente problema regolarizzato supponendo che f sia localmente Lipschitz continua su $[0, \infty[$:

$$(P_\epsilon): \begin{cases} \dfrac{(M_\epsilon(v'))'}{g(t^{(k-1)/k}|v'|^2)} + \dfrac{a_{nk}}{2t}\dfrac{M_\epsilon(v')}{g(t^{(k-1)/k}|v'|^2)} + f(v) = 0, \text{ in } \mathbf{R}^+ \\ v'(0) = 0, \; v \geq 0 \\ v(t) \to 0, \; t \to \infty; \end{cases}$$

dove

$$M_\epsilon(p) = (p^2 + \epsilon^2)^{(k-1)/2}p \text{ e } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Con questo accorgimento, già impiegato da Franchi, evito che il problema degeneri quando $v' = 0$. Pertanto per ogni $\epsilon > 0$ i problemi (P_ϵ) sono regolarizzazioni ellittiche di (P_2).

La dimostrazione dell'esistenza di stati fondamentali per (P_ϵ) è suddivisa in due parti.

Nella prima parte tratterò l'esistenza e l'unicità di una soluzione globale per il problema di Cauchy:

$$(P_{3\epsilon}): \begin{cases} \dfrac{(M_\epsilon(v'))'}{g(t^{(k-1)/k}|v'|^2)} + \dfrac{a_{nk}}{2t}\dfrac{M_\epsilon(v')}{g(t^{(k-1)/k}|v'|^2)} + f(v) = 0 \\ v(0) = \eta \\ v'(0) = 0, \end{cases}$$

quando $\eta \in [\beta, \gamma[$ e

$$\beta = \inf\{s : \int_0^s f(t)dt > 0\}.$$

Nella seconda parte proverò l'esistenza di un $\eta \in [\beta, \gamma[$ la cui soluzione corrispondente è uno stato fondamentale (metodo cosiddetto dello "shooting"). Vediamo schematicamente in che cosa consiste la dimostrazione di questi due punti essenziali.

Soluzioni globali per il problema di Cauchy

Provo l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale di $(P_{3\epsilon})$ dimostrando che l'operatore:

$$K : A \to A$$

$$A \equiv A(\delta, \rho, \eta) = \{v \in C^1([0,\delta]) /\ v(0) = \eta,\ ||v - \eta|| < \rho\},$$

$$K(v) = \eta + \int_0^t M_\epsilon^{-1}(-\int_0^s (\frac{\xi}{s})^{a_{nk}/2} f(v(\xi))g(\xi^{(k-1)/k} v'(\xi)^2)d\xi)ds,$$

quando δ e ρ sono opportunamente piccoli, è una contrazione, vedi [2]. Successivamente estendo la soluzione a tutto $\mathbf{R}^+$ e concludo la prima parte dimostrando che la soluzione v_η del problema di Cauchy $(P_{3\epsilon})$ e v'_η dipendono con continuità da $\eta \in [\beta, \gamma[$ su ogni sottoinsieme compatto di $[0, \infty[$.

Esistenza di uno stato fondamentale per (P_ϵ)

La dimostrazione dell'esistenza di uno stato fondamentale del problema (P_ϵ), a cui accennerò per sommi capi, è basata sul cosiddetto metodo dello "shooting", vedi [1], [3], [4] e [5].

Il problema di Cauchy $(P_{3\epsilon})$ ha soluzione per ogni $\eta \in [\beta, \gamma[$, inoltre si possono verificare solo tre casi:

1) $v_\eta(t) > 0,\ v'_\eta(t) < 0$ in $]0, \infty[$;

2) esiste $T_\eta > 0$ tale che $v'_\eta(t) < 0$ in $]0, T_\eta[$ e $v_\eta(T_\eta) = 0$;

3) esiste $T_\eta > 0$ tale che $v_\eta(t) > 0,\ v'_\eta(T_\eta) = 0$ e $v'(t) < 0$ in $]0, T_\eta[$.

Siano:

$$I^+ = \{\eta \in [\beta, \gamma[:\ \inf v_\eta > 0\} \text{ e},$$

$$I^- = \{\eta \in [\beta, \gamma[:\ v(R) = 0 \text{ per qualche } R > 0\}.$$

I^+ e I^- sono non vuoti aperti e disgiunti, pertanto la loro unione non può essere $[\beta, \gamma[$ per ragioni di connessione. Quindi esiste almeno una soluzione non banale del problema di Cauchy per cui $v_\eta(t) > 0, v'_\eta(t) < 0$ in $]0, \infty[$ e $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$, cioè uno stato fondamentale per (P_ϵ). Poichè in generale supponiamo che f sia localmente Lipschitz continua su $]0, \infty[$, concludiamo la dimostrazione dell'esistenza di uno stato fondamentale per (P_2) nel modo seguente, vedi [2].

Con l'ausilio di opportuni mollificatori si costruisce una successione di funzioni f_{ϵ_j} in modo tale che per ogni j, f_{ϵ_j} soddisfi (I_2) e sia localmente Lipschitz continua su $[0,\infty[$. Inoltre $f_{\epsilon_j} \to f$ quando $\epsilon_j \to 0$ per $j \to \infty$. Quindi per ogni problema (P_{ϵ_j}) esiste uno stato fondamentale u_{ϵ_j}. Infine con una opportuna tecnica è possibile provare che la successione u_{ϵ_j} converge ad uno stato fondamentale di (P_2).

Conclusioni

Seguendo lo schema della dimostrazione appena esposta è possibile provare l'esistenza di stati fondamentali per una classe di funzioni g più ampia. Infatti vale il seguente:

Teorema 2.2 *Sia f una funzione continua su $[0,\infty[$ che sia Lipschitz continua su $]0,\infty[$. Supponiamo:*

i) esistono $\alpha > 0, \gamma in\ ]\alpha,\infty[$ tali che $f(u) < 0$ per $u \in]0,\alpha[$, $f(u) > 0$ per $u \in]\alpha,\gamma[$ e $f(u) = f(\alpha) = f(\gamma) = 0$;

ii) esiste $\beta = inf\{v > 0 : \int_0^s f(t)dt > 0\} \in]\alpha,\gamma[$;

iii) $\int_0^\infty \frac{\xi^k}{g(\xi^2)} d\xi = \infty$.

Dove g è una funzione differenziabile su $[0,\infty[$ tale che $0 \leq tg'(t) \leq \frac{s}{2}g(t)$ per $s \geq 0$ opportuno.
Se $0 \leq s \leq k+1 \leq n+1$, allora il problema (P_1) ammette uno stato fondamentale.

I risultati ottenuti non consentono di affermare che per $s = n+2$ e $k = n$ l'equazione (G) ammette uno stato fondamentale. Viene cioè escluso il caso della curvatura di Gauss.

Bibliografia

[1] **H. Beresticki, P.L. Lions, L.A. Peletier**: *An O.D.E. Approach to the Existence of Positive Solutions for semilinear Problems* , Indiana Univ. Math.J. 30 (1981), 141-157.

[2] **F. Ferrari**: *Ground state Solutions for k-th Hessian Operators*, preprint (1993).

[3] **B. Franchi, E. Lanconelli, J. Serrin**: *Existence and Uniqueness of Non-negative Solution of of Quasilinear Equations in* $\mathbf{R}^n$, Adv. in Maths, in corso di stampa.

[4] **B. Franchi, E. Lanconelli**: *Radial Symmetry of the Ground States for a Class of Quasilinear Elliptic Equations*, in "Non linear Diffusion Equations and Their Equilibrium States I", W.M.Ni. L.A. Peletier and J.Serrin editors, Springer-Verlag, New-York, 1988, pp. 293-300.

[5] **B. Franchi**: Global Solutions for a Class of Monge-Ampère Equations, in "Non-linear Diffusion Equations and their Equilibrium States", Gregynog 1989; W.M.Ni., L.A. Peletier and J. Serrin editors, Birkhauser 1992.

[6] **D. Gilbarg, N.S. Trudinger**: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, second edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokio 1983.

[7] **R. Godement**: Cours d'algebre Hermann Paris 1966, troisième edition.

[8] **R.C. Reilly**: Variational Properties of Functions of the Mean Curvatures for Hypersurfaces in space forms, J.Differential Geometry 8(1973) 465-477.

[9] **K. Tso**: Remarks on critical exponents for Hessian operators, in Annales de l'Institut Henri Poincare - Analyse non lineaire, Vol.7, nm.2- 1990.